Momen Inersia tanpa Kalkulus

Yohanes Surya

ABSTRAK

Dalam makalah ini kami menurunkan rumus momen inersia berbagai benda seperti batang tipis, segitiga sama sisi, segiempat beraturan, segienam beraturan, selinder, bola tipis dan bola pejal tanpa menggunakan kalkulus. Penurunan menggunakan konsep analisa dimensi, teorema sumbu sejajar, konsep simetri dan sedikit aljabar. Hasil penurunan momen inersia diberikan pada tabel 1.

PENDAHULUAN

Dalam mengajar fisika di sekolah menengah atas (SMU) maupun mahasiswa tingkat persiapan seringkali para guru atau dosen mengeluh karena kesulitan untuk menjelaskan momen inersia dari benda pejal seperti batang, selinder, bola tipis (bola pingpong) dan bola pejal tanpa menggunakan kalkulus. Tidak ada literatur yang menurunkan semua momen inersia ini secara lengkap. Buku-buku teks seperti *Physics* oleh Halliday Resnick(1), *Physics* oleh R. Serway(2) menurunkan momen inersia beberapa benda dengan menggunakan integral, padahal siswa-siswa SMU atau mahasiswa tingkat persiapan belum sungguh-sungguh mengenal perhitungan dengan menggunakan integral dan differensial. Waldemar Gorzkowski(3) pernah menurunkan rumus momen inersia untuk bola tipis dan bola berongga tetapi tidak untuk segitiga, segiempat dan segienam.

Dalam makalah ini kami menurunkan rumus momen inersia tanpa menggunakan kalkulus untuk benda-benda dimulai dari batang, segitiga, segiempat, segienam, selinder, bola tipis dan bola pejal yang hasilnya dituliskan dalam tabel 1. Makalah ini terbagi atas 7 bab, setiap bab membahas penurunan rumus masing-masing benda diatas.

Tabel I: momen inersia berbagai benda yang diputar terhadap sumbu yang melalui pusat massanya.

Benda	**Momen inersia**	**Keterangan**
Batang	$I_{pm} = \frac{1}{12} ml^2$	l = panjang batang
Segitiga sama sisi	$I_{pm} = \frac{1}{12} ma^2$	a = panjang sisi segitiga
Segiempat beraturan	$I_{pm} = \frac{1}{6} ma^2$	a = panjang sisi segiempat
Segienam beraturan	$I_{pm} = \frac{5}{12} ma^2$	a = panjang sisi segienam
Selinder pejal	$I_{pm} = \frac{1}{2} mR^2$	R = jari-jari selinder.
Bola tipis	$I_{pm} = \frac{2}{3} mR^2$	R= jari-jari bola
Bola pejal	$I_{pm} = \frac{2}{5} mR^2$	R= jari-jari bola

BAB 1. MOMEN INERSIA BATANG PEJAL

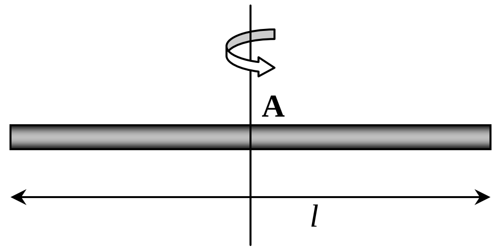
Anggap suatu batang bermassa m dan panjang l diputar terhadap suatu sumbu yang melalui pusat massanya (Gb.1). Pada batang ini ada dua variabel yaitu massa dan panjang batang. Jika kita anggap momen inersia batang ini (I_{pm}) tergantung pada kedua variabel ini maka dengan analisa dimensi kita bisa memperoleh bahwa momen inersia batang sebanding dengan massa batang dan sebanding dengan kuadrat panjang batang, atau secara matematika dapat ditulis:

$$I_{pm} \propto ml^2 \tag{1}$$

atau kita boleh tuliskan:

$$I_{pm} = cml^2 \text{ (batang)} \tag{2}$$

dimana c adalah suatu konstanta.



Gb.1. Batang yang diputar terhadap sumbu yang melalui pusat massanya (titik A).

Sekarang perhatikan potongan batang sebelah kiri yang mempunyai panjang ½ *l* dan massa ½ *m*. Momen inersia potongan batang ini terhadap sumbu yang melalui pusat massanya dapat ditulis sebagai:

$$\left(I_{pm}\right)_1 = c\left(\frac{1}{2}m\right)\left(\frac{1}{2}l\right)^2 = c\frac{1}{8}ml^2 \tag{3}$$

Gunakan teorema sumbu sejajar untuk menghitung momen inersia potongan batang ini terhadap sumbu yang melalui titik A.

$$\left(I_A\right)_1 = \left(I_{pm}\right)_1 + m'r^2 = c\frac{1}{8}ml^2 + \left(\frac{1}{2}m\right)\left(\frac{1}{4}l\right)^2 \tag{4}$$

Catatan: *r* = ¼ *l* adalah jarak pusat massa potongan batang dengan titik A dan *m'* = ½ *m* adalah massa dari potongan batang ini.

Dengan cara yang sama kita peroleh momen inersia potongan batang kanan terhadap titik A adalah:

$$\left(I_A\right)_2 = c\frac{1}{8}ml^2 + \left(\frac{1}{2}m\right)\left(\frac{1}{4}l\right)^2 \tag{5}$$

Jumlah momen inersia pada persamaan (4) dan persamaan (5) sama dengan momen inersia yang ditulis pada persamaan (2). Dari sini kita akan peroleh persamaan:

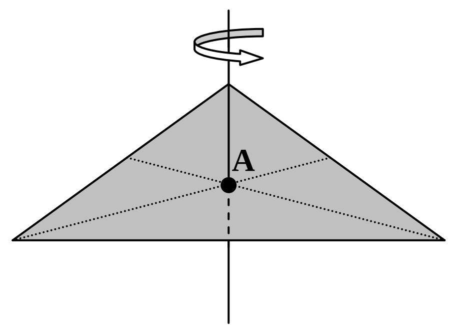
$$cml^2 = c\frac{1}{4}ml^2 + \frac{1}{16}ml^2 \tag{6}$$

Selesaikan persamaan (6) kita akan memperoleh *c = 1/12*. Sehingga kita akan peroleh rumus momen inersia batang panjang *l* dan massa *m* yang diputar terhadap sumbu yang melalui pusat massanya sebagai:

$$\left(I_{pm}\right)_{\text{batang}} = \frac{1}{12} ml^2 \qquad (7)$$

BAB 2 MOMEN INERSIA SEGITIGA PEJAL SAMA SISI

Anggap suatu segitiga pejal sama sisi dengan panjang sisi *a* dan massa *m* diputar terhadap sumbu yang melalui titik pusat massa A (Gb. 2).



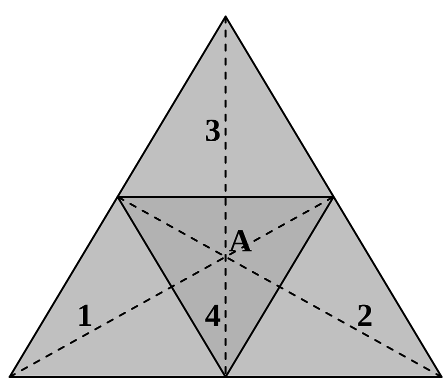
Gb. 2. Segitiga yang diputar terhadap sumbu yang melalui titik pusat massa A.

Seperti pada perhitungan momen inersia batang, dengan analisa dimensi kita peroleh momen inersia segitiga terhadap sumbu yang melalui pusat massanya adalah:

$$I_{pm} = cma^2 \text{ (segitiga)} \qquad (8)$$

disini *c* adalah konstanta, *m* massa segitiga dan *a* adalah sisi segitiga.

Selanjutnya adalah membagi segitiga ini menjadi 4 potongan segitiga dengan panjang sisi ½ *a* dan massa masing-masing segitiga ¼ *m* (Gb. 3)



Gb.3 Membagi segitiga menjadi 4 potong

Dengan menggunakan persamaan (8), momen inertia tiap potongan segitiga terhadap sumbu yang melalui pusat massanya dapat ditulis:

$$\left(I_{pm}\right)_1 = c\left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{1}{2}a\right)^2 \tag{9}$$

Sekarang gunakan teorema sumbu sejajar untuk memperoleh momen inersia masing-masing potongan segitiga 1,2 dan 3 terhadap titik A.

$$\left(I_A\right)_1 = \left(I_{pm}\right)_1 + m'r^2 = c\frac{1}{16}ma^2 + \left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 \tag{10}$$

Disini *m' = ¼ m* adalah massa potongan segitiga dan $r = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}a\right)\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ adalah jarak antara pusat massa potongan segitiga ke titik A (catatan *h* adalah tinggi potongan segitiga).

Berikutnya jumlahkan momen inersia ketiga potongan segitiga 1,2 dan 3 yaitu dengan mengalikan momen inersia pada persamaan (10) dengan 3 lalu jumlahkan dengan momen inersia potongan segitiga 4

$$\left(I_A\right)_{empat\ segitiga} = 3\left(c\frac{1}{16}ma^2 + \frac{1}{48}ma^2\right) + c\frac{1}{16}ma^2 \tag{11}$$

Samakan persamaan (11) dengan persamaan (8) untuk memperoleh persamaan:

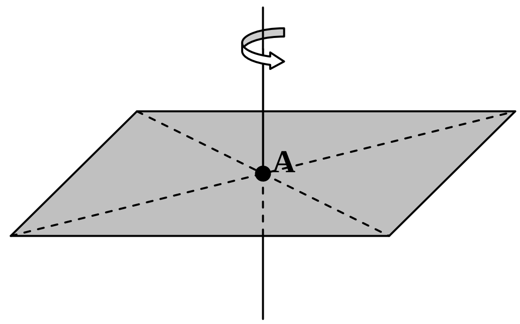
$$cma^2 = c\frac{1}{4}ma^2 + \frac{1}{16}ma^2 \tag{12}$$

Dari persamaan (12) kita peroleh $c = 1/12$ sehingga momen inersia segitiga sama sisi pejal bermassa *m* dan bersisi *a* yang diputar terhadap sumbu yang melalui pusat massanya adalah:

$$\left(I_{pm}\right)_{\text{segitiga}} = \frac{1}{12}ma^2 \tag{13}$$

BAB 3 MOMEN INERSIA SEGIEMPAT PEJAL

Anggap suatu segiempat pejal dengan panjang sisi *a* dan massa *m* diputar terhadap titik pusat massa A (Gb. 4).



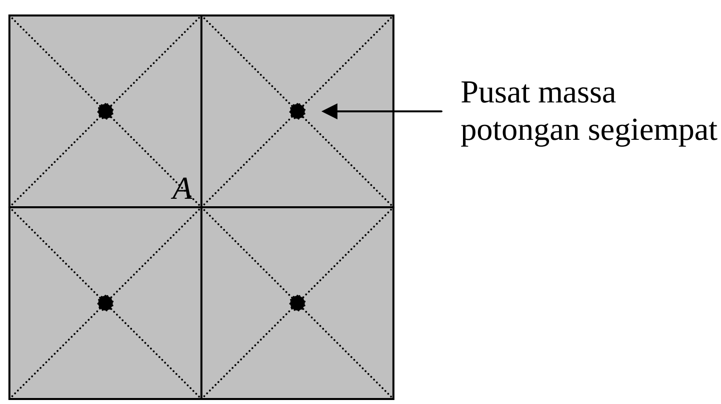
Gb. 4. Segiempat yang diputar terhadap sumbu yang melalui titik pusat massa A.

Seperti pada perhitungan sebelumnya, momen inersia segiempat terhadap sumbu yang melalui pusat massanya kita tulis sebagai (dengan analisa dimensi):

$$I_{pm} = cma^2 \text{ (segiempat)} \qquad (14)$$

disini *c* adalah konstanta, *m* massa segiempat dan *a* adalah sisi segiempat.

Selanjutnya adalah membagi segiempat ini menjadi 4 potongan segiempat dengan panjang sisi ½ *a* dan massa masing-masing segiempat ¼ *m* (Gb. 5)



Gb. 5. Segiempat yang dibagi menjadi 4 bagian yang sama.

Dengan menggunakan persamaan (14), momen inertia tiap potongan segiempat terhadap sumbu yang melalui pusat massanya sendiri dapat ditulis:

$$\left(I_{pm}\right)_1 = c\left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{1}{2}a\right)^2 \tag{15}$$

Sekarang gunakan teorema sumbu sejajar untuk memperoleh momen inersia masing-masing potongan segiempat terhadap titik A.

$$\left(I_A\right)_1 = \left(I_{pm}\right)_1 + m'r^2 = c\frac{1}{16}ma^2 + \left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2 \tag{16}$$

Disini $m' = ¼\, m$ adalah massa potongan segiempat dan $r = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}a$ adalah jarak antara pusat massa potongan segiempat ke titik A.

Sekarang jumlahkan momen inersia keempat potongan segiempat dengan mengalikan momen inersia pada persamaan (16) dengan 4 dan samakan dengan persamaan (14) untuk memperoleh persamaan:

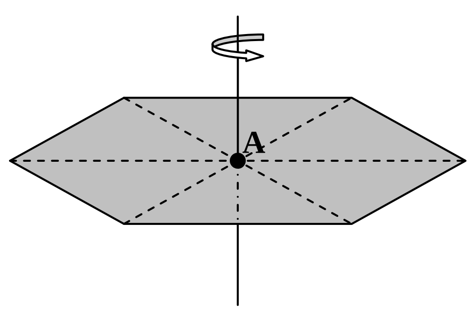
$$cma^2 = c\frac{1}{4}ma^2 + \frac{1}{8}ma^2 \tag{17}$$

Dari persamaan (17) kita peroleh c = 1/6 sehingga momen inersia segiempat sama sisi pejal bermassa *m* dan bersisi *a* yang diputar terhadap pusat massanya adalah:

$$\left(I_{pm}\right)_{\text{segiempat}} = \frac{1}{6}ma^2 \tag{18}$$

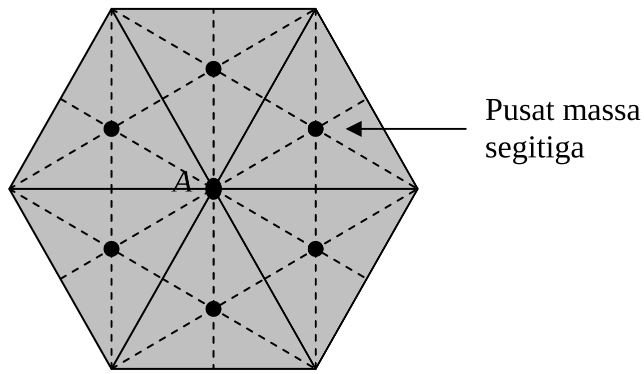
Bab 4 Momen inersia segienam

Anggap suatu segienam pejal dengan panjang sisi *a* dan massa *m* diputar terhadap titik pusat massa A (Gb. 6).



Gb. 6. Segienam yang diputar terhadap titik pusat massa A.

Kita bagi segienam ini menjadi 6 potongan segitiga sama sisi dengan panjang sisi *a* dan massa masing-masing segitiga *m/6* (Gb. 7)



Gb. 7. Segienam yang dibagi menjadi enam segitiga

Dengan menggunakan hasil yang perhitungan momen inersia pada persamaan (13), kemudian menggunakan teorema sumbu sejajar kita peroleh momen inersia masing-masing potongan segitiga terhadap titik A (pusat massa segienam) adalah:

$$\left(I_A\right)_1 = \left(I_{pm}\right)_1 + m'r^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}m\right)a^2 + \left(\frac{1}{6}m\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 \tag{19}$$

Disini *m'* adalah massa segitiga dan $r = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ adalah jarak antara pusat massa segitiga ke titik A (*h* adalah tinggi segitiga).

Momen inersia segienam sama sisi pejal bermassa *m* dan bersisi *a* yang diputar terhadap pusat massanya diperoleh dengan mengalikan 6 momen inersia pada persamaan (19),

$$\left(I_{pm}\right)_{\text{segienam}} = \frac{5}{12}ma^2 \tag{20}$$

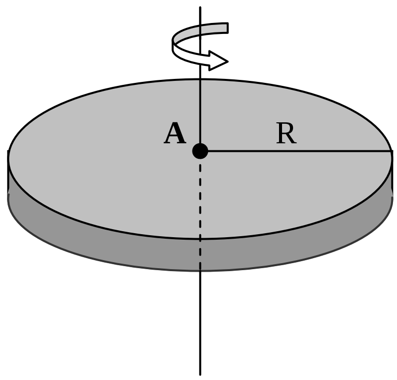
Bab 5 Momen inersia selinder

Momen inersia selinder dapat dihitung dengan menghitung momen inersia dari benda bersegi *n* kemudian ambil limit *n* mendekati tak hingga. Atau dengan menggunakan metode berikut ini.

Anggap sebuah selinder pejal berjari-jari R. Momen inersia selinder ini (dengan analisa dimensi) boleh ditulis sebagai

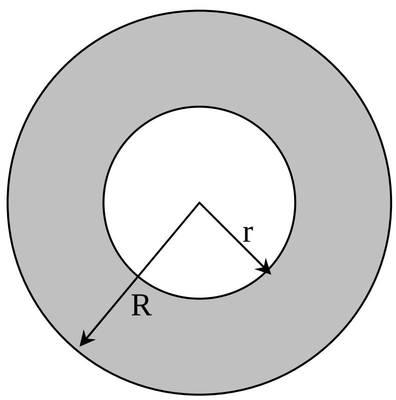
$$I_{pm} = cmR^2 \tag{21}$$

dengan c adalah konstanta dan m massa selinder.



Gb. 8. Selinder yang berputar

Sekarang kita tinjau selinder berongga dengan jari-jari rongga r dan massanya m.



Gb. 9. Selinder berongga

Dengan prinsip superposisi momen inersia selinder ini sama dengan momen inersia selinder besar dikurangi dengan momen inersia selinder kecil.

$$\begin{aligned} I'_{pm} &= I_{selinder\ besar} - I_{selinder\ kecil} \\ &= cm_{besar}R^2 - cm_{kecil}r^2 \end{aligned} \tag{22}$$

dengan menulis massa selinder besar $m_{besar} = \dfrac{m}{\pi\left(R^2 - r^2\right)}\left(\pi R^2\right)$ dan massa selinder kecil

sebagai $m_{kecil} = \dfrac{m}{\pi\left(R^2 - r^2\right)}\left(\pi r^2\right)$ kita peroleh

$$\left(I_A\right)_{berongga} = c\frac{m\left(R^4 - r^4\right)}{\left(R^2 - r^2\right)} = cm\left(R^2 + r^2\right) \quad (23)$$

Sekarang anggap sekumpulan massa dengan massa total *m* tersebar pada lingkaran berjari-jari *R*. Momen inersia dari lingkaran ini adalah,

$$I_{lingkaran} = \sum_i m_i R^2 = R^2 \sum_i m_i = mR^2 \quad (24)$$

Selanjutnya pada persamaan (23) kita ambil $r = R$ dan kita gunakan persamaan (24) untuk memperoleh persamaan:

$$cm\left(R^2 + R^2\right) = mR^2 \quad (25)$$

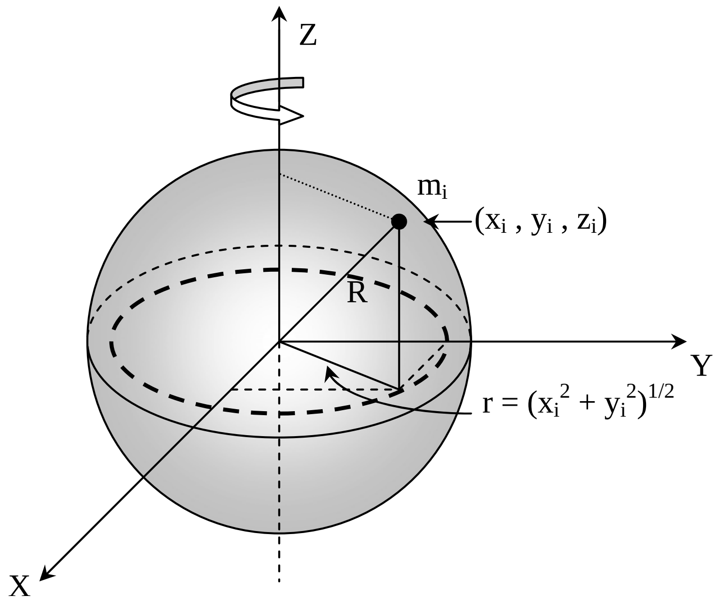
Dari persamaan (25) kita peroleh $c = ½$, sehingga momen inersia selinder bermassa *m* dan berjari-jari *R* yang berputar terhadap sumbu yang melalui pusat massanya adalah

$$\left(I_{pm}\right)_{selinder} = \frac{1}{2} mR^2 \quad (26)$$

Bab 6 Momen inersia Bola tipis

Ide penurunan rumus ini diperoleh dari Waldemar Gorzkowski[(5)]. Kita anggap sejumlah massa dengan massa total *m*, tersebar merata pada bola tipis berjari-jari *R*. Anggap pusat massa bola terletak pada pusat koordinat dan bola diputar terhadap sumbu z. Anggap massa m_i terletak pada koordinat (x_i, y_i, z_i). Dari definisi momen inersia besarnya momen inersia massa ini terhadap sumbu z adalah $I_i = m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)$. Jika massa m_i tersebar merata di seluruh permukaan bola, maka momen inersia bola tersebut adalah,

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) \quad (27)$$



Gb. 10. bola tipis yang berputar

Karena massa tersebar merata (uniform) maka bola simetri sehingga,

$$\sum_i m_i x_i^2 = \sum_i m_i y_i^2 = \sum_i m_i z_i^2 \tag{28}$$

Dengan menggunakan persamaan (28) kita peroleh:

$$mR^2 = \sum_i m_i R^2 = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right) = 3\sum_i m_i x_i^2 \tag{29}$$

atau

$$\sum_i m_i x_i^2 = \sum_i m_i y_i^2 = \frac{1}{3} mR^2 \tag{30}$$

Gunakan persamaan (30) pada persamaan (27) kita peroleh,

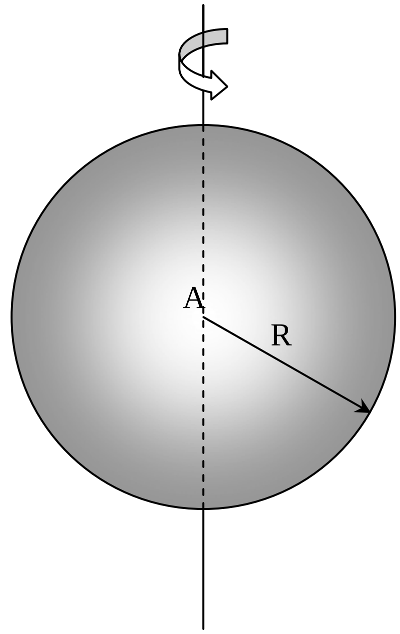
$$I_{pm} = \frac{2}{3} mR^2 \text{ (bola tipis)} \tag{31}$$

Bab 7 Momen inersia bola pejal

Anggap sebuah bola pejal berjari-jari R. Momen inersia bola ini (dengan analisa dimensi) boleh ditulis sebagai

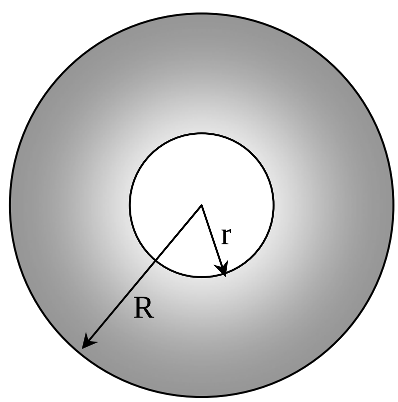
$$I_{pm} = cmR^2 \tag{32}$$

dengan c adalah konstanta dan m massa bola.



Gb. 11. bola pejal yang berputar terhadap sumbu z.

Sekarang kita tinjau bola berongga dengan jari-jari rongga r dan massanya m.



Gb. 13 bola pejal berongga

Dengan prinsip superposisi momen inersia bola ini sama dengan momen inersia bola besar dikurangi dengan momen inersia bola kecil.

$$\begin{aligned} I'_{pm} &= I_{bola\ besar} - I_{bola\ kecil} \\ &= cm_{besar}R^2 - cm_{kecil}r^2 \end{aligned} \tag{33}$$

dengan menulis massa bola besar $m_{besar} = \dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right)}\left(\dfrac{4}{3}\pi R^3\right)$ dan massa bola kecil sebagai $m_{kecil} = \dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right)}\left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)$ kita peroleh

$$\left(I_A\right)_{berongga} = c\frac{m\left(R^5 - r^5\right)}{\left(R^3 - r^3\right)} = cm\frac{\left(R^4 + R^3r + R^2r^2 + Rr^3 + r^4\right)}{R^2 + Rr + r^2} \tag{34}$$

Selanjutnya ambil *r=R* dan gunakan persamaan (31) untuk memperoleh persamaan:

$$cm\frac{5}{3}R^2 = \frac{2}{3}mR^2 \tag{35}$$

Dari persamaan (35) kita peroleh *c =2/5* , sehingga momen inersia bola bermassa *m* dan berjari-jari *R* yang berputar terhadap sumbu yang melalui pusat massanya adalah

$$I_{pm} = \frac{2}{5}mR^2 \quad \text{(bola pejal)} \tag{36}$$

Kesimpulan

Telah ditunjukkan diatas bahwa kita dapat memperoleh momen inersia dari beberapa benda yang bentuknya beraturan tanpa menggunakan kalkulus. Perhitungan hanya dengan memanfaatkan analisa dimensi untuk mencari hubungan antara momen inersia dengan variabel yang mencirikan benda itu (seperti massa, panjang atau jari-jari) serta dengan memanfaatkan teorema sumbu sejajar dan tentu saja sifat simetri benda.

Hasil ini kiranya dapat dimanfaatkan oleh para guru maupun dosen universitas untuk mengajarkan momen inersia dengan cara yang lebih mudah.

Referensi

(1) Halliday and Resnick, Physics, John Wiley and Sons, INC, USA 1992
(2) Raymond A Serway, Physics, Saunders College Publishing, USA 1996
(3) Waldemar Gorzkowski, “Application of Symmetry and Dimensional Analysis to Solving Problems”. disajikan pada Seminar Guru Fisika Jakarta 2000.